Worksheet: Théorème des accroissements finis et son interprétation

Dans cette feuille d'activités, nous nous entraînerons à utiliser le théorème des accroissements finis.

Q1:
Loïc n'est pas convaincu que le théorème des accroissements finis soit vrai car, dit-il, la fonction $f(x) = |x|$ a la propriété que si on prend $a = -2$ et $b = 2$, on obtient $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$, et de plus il n'y a pas de point x tel que $f'(x) = 0$. Quelle est son erreur?

Q2: Considère l'affirmation que si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et $f'(x) > 0$ sur celui-ci, alors f est strictement croissante sur I.

Lequel des énoncés suivants est équivalent à ce qui précède?

A. Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et strictement croissante sur celui-ci, alors $f'(a) > 0$ en un certain point $a \in I$.

B. Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et n'est pas strictement croissante sur celui-ci, alors $f'(x) \leq 0$ en tous les points $x \in I$.

C. Si f est dérivable sur un intervalle I n'est pas strictement croissante sur celui-ci, alors $f'(a) \leq 0$ en un certain point $a \in I$.

D. Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et strictement croissante sur celui-ci, alors $f'(x) > 0$ pour tous les points $x \in I$.

E. Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et $f'(x) \leq 0$ sur celui-ci, alors f n'est pas strictement croissante sur I.

Que cela signifie pour une fonction f de ne pas être strictement croissante sur l'intervalle I?

- A Dès que $a, b \in I$ vérifient $a < b$, alors $f(b) \leq f(a)$.
- B Il y a un point $a \in I$ où $f'(a) \leq 0$.
- C Il y a des points $a, b \in I$ tels que $a < b$ mais $f(b) \leq f(a)$.
- D Il y a des points $a, b \in I$ tels que $a < b$ mais $f(b) = f(a)$.
- E Il y a des points $a, b \in I$ tels que $a < b$ mais $f(b) < f(a)$.

En utilisant l'assertion équivalente au résultat principal, comment peux-tu utiliser le théorème des accroissements finis pour prouver l'assertion équivalente?

A Si f est dérivable sur I et n'y est pas strictement croissante, alors on prend $a < b$ avec $f(a) \leqslant f(b)$. Par le théorème des accroissements finis, on obtient c entre a et b où $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, alors $f'(c) \leq 0$.

B Il n'est pas possible de prouver l'assertion à l'aide du théorème des accroissements finis.

C Si f et strictement croissante sur I et n'est pas strictement croissante, alors on prend $a < b$ avec $f(a) \geq f(b)$. Par le théorème des accroissements finis, on obtient c entre a et b et où $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, alors $f'(c) \leq 0$.

D Si f est dérivable sur I et n'est pas strictement croissante, alors on prend $a < b$ avec $f(a) \geq f(b)$. Par le théorème des accroissements finis, on obtient c entre a et b où $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, alors $f'(c) = 0$.

E Si f est dérivable sur I et n'est pas strictement croissante, alors on prend $a < b$ avec $f(a) \geq f(b)$. Par le théorème des accroissements finis, on obtient c entre a et b où $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, alors $f'(c) > 0$.

Q3: Considère le résultat: si f est dérivable sur un intervalle I et $f'(x) = 0$, alors $f(x) = c$, une constante, pour tout $x \in I$.

Laquelle des affirmations suivantes dit exactement la même chose que le résultat de la fonction constante?

A Si f est une fonction constante sur un intervalle I, alors f est dérivable et $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

B Si f est dérivable sur un intervalle I et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors $f(x)$ n'est pas une fonction constante.

C Si f est dérivable sur un intervalle I mais pas une fonction constante, alors $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

D Si f est dérivable sur un intervalle I mais pas une fonction constante, alors $f'(a) \neq 0$ en un certain $a \in I$.

E Si f est dérivable sur un intervalle I et $f'(a) \neq 0$ en un certain $a \in I$, alors $f(x)$ n'est pas une fonction constante.

Si f est dérivable sur un intervalle I et n'est pas une constante, on a des points $a, b \in I$ avec $f(a) \neq f(b)$. Comment cela montre que $f'(c) \neq 0$ en un certain point $c \in I$?